ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Τρίτη 25-6-2024

1. (Μόρια 20) Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ μια διαγωνίσιμη γραμμική απεικόνιση. Να δείξετε ότι $\mathrm{Tr}(f \circ f) \geq 0$.

2. (Μόρια 20) Έστω
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R}).$$
Να υπολογιστεί ο πίνακας A^m για κάθε ακέραιο $m \geq 1$.

3. (Μόρια 20) Δίνεται ο πίνακας
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R}).$$
   (α) Να βρεθεί το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο του A.
   (β) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι του πίνακα A. Είναι ο πίνακας A θετικά ορισμένος;
   (δ) Να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε ο $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

4. (Μόρια 20) Έστω $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ συμμετρικός. Υποθέτουμε ότι $A^{2023} = A^{2024}$. Δείξτε ότι $A^2 = A$.

5. (Μόρια 20) Δίνεται η απεικόνιση $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$\langle x, y \rangle = 9x_1y_1 + 25x_2y_2 + x_3y_3,$$
για κάθε $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ και $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.
   (α) Δείξτε ότι η απεικόνιση $\langle \cdot , \cdot \rangle$ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$.
   (β) Να βρεθεί ισομετρία $f : (\mathbb{R}^3, \langle \cdot , \cdot \rangle) \to (W, \langle \cdot , \cdot \rangle_{can})$, όπου W είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που περιγράφεται από τη σχέση
$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : z - w = 0\}$$
   και $\langle \cdot , \cdot \rangle_{can}$ το κανονικό εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^4$.

Καλή επιτυχία.